GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

Sidinei Delai[1]

Valdeni Soliani Franco[2]

RESUMO

A pesquisa que trata este artigo, foi realizada com alunos do Ensino Médio do Colégio Estadual Rachel de Queiroz do Município de Ivaté-PR., e com professores de Matemática da Rede Estadual de Educação do Núcleo Regional de Educação de Umuarama, com a finalidade de mostrar conteúdos importantes dentro da matemática e que pouco estão sendo divulgados ou trabalhados. Com os alunos foi realizado pesquisas na internet sobre a Geometria Euclidiana, principalmente sobre os cinco postulados de Euclides. Em seguida foram discutidas algumas das Geometrias Não-Euclidianas: a Hiperbólica, a Esférica, a do Táxi e a Projetiva. Como exemplos práticos foram realizados construções de figuras e confecção de materiais. O conteúdo e a metodologia usada despertaram interesse nos alunos, facilitando o desenvolvimento das atividades propostas. Aos professores foram apresentados por meio de slides: conceitos de Geometrias Não-Euclidianas e algumas utilidades práticas dessas geometrias. Além disso, buscou-se motivá-los a trabalhar o assunto em sala de aula.

Palavras chave: Geometrias não-euclidianas; Ensino Médio, Alunos, Professores.

ABSTRACT

The research that treats this article, was carried out with pupils of Secondary Education of Rachel de Queiroz State College, in Ivaté City - Paraná, and with Mathematics teachers of Education state chain of Regional Office of Education of Umuarama city, with the purpose to show important contents of mathematic that little are being divulged or learned. With the students was carried out research in the Internet

[1] Professor da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná
Especialização em Matemática
Universidade Paranaense - UNIPAR
e-mail: sidinei@seed.pr.gov.br
[2] Professor da Universidade Estadual de Maringá
e-mail: vsfranco@uem.br

about the Euclidean Geometry, mainly about the five postulates of Euclides. After that, some of the No-Euclidean Geometry were argued: the Hyperbolic, the Spherical, of the Taxi and the Projective. As practical examples had been carried out constructions of figures and confection of materials. To the teachers was presented in slides: definition of No-Euclidean geometry and some practical examples of these geometries. The content and the methodology arouse interest in the students, becoming easier the development propos activities. To the teaches was arose the interest to teach about this content in the class.

Word-key: No-euclidian Geometry; secondary Education; pupils; teachers.

INTRODUÇÃO

Este trabalho insere-se no campo do ensino e aprendizagem de Geometria, em particular as Geometrias Não-Euclidianas. O interesse por essas geometrias surgiu ao desenvolver o objeto de estudo no Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. Tinha apenas ouvido comentários sobre a existência dessas geometrias, mas não tinha conhecimento. Ao entrar em contato com o professor orientador na Universidade Estadual de Maringá, foi onde tive algumas informações sobre o assunto e foi indicado algumas fontes de pesquisas bibliográficas as quais pude consultar e me interar do assunto.

Outro fator importante para se estudar o assunto, foi o fato dessas geometrias constarem como componentes específicos dos conteúdos estruturantes das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná.

Pode-se perceber que a discussão em torno do quinto postulado de Euclides foi a grande responsável pela construção de tais geometrias. Durante séculos, diversos matemáticos achavam que seria possível chegar a uma demonstração do quinto postulado, utilizando os outros quatro postulados, tornando-o um teorema.

Em 1733, Giovanni Saccheri, que estava empenhado em encontrar contradições em geometrias que não se utilizassem do quinto postulado, acabou abrindo caminho para que outros matemáticos, como Lobachevsky, Bolyai, Gauss e Riemann aprofundassem os estudos e descobrissem geometrias onde o postulado das paralelas não é válido, trazendo resultados muito importantes para a Matemática e a Física.

Essas geometrias começaram a serem estudadas por Girolamo Saccheri (1667-1733) que publicou uma série de teoremas, concluindo ter chegado a uma contradição do quinto postulado de Euclides, que aparece na obra de Euclides intitulada Elementos. Mas, após essa publicação, Saccheri veio a falecer, permanecendo sua obra esquecida. Desde a publicação dos Elementos, havia suspeitas que o seu quinto postulado poderia ser demonstrado utilizando os quatros postulados anteriores, e muitos foram os matemáticos que tentaram demonstrá-lo, mas só por volta de 1830 surgiram suspeitas que talvez outras geometrias pudessem ser desenvolvidas contradizendo o postulado das paralelas e, portanto, ele não poderia ser demonstrado a partir dos outros.

A não existência de prova do quinto postulado de Euclides levou os matemáticos a interpretar que este não é uma conseqüência dos outros quatro anteriores, e ao substituí-los poderiam criar uma geometria consistente como a de Euclides.

O húngaro János Bolyai (1802-1860) e o russo Nicokolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856) publicaram, independentemente a descoberta de geometrias não-euclidianas, ou seja, neste caso geometrias que negavam o postulado das paralelas descrito por Euclides.

As publicações de Bolyai e Lobachevski não foram suficientes para convencer o mundo matemático da possibilidade das geometrias não-euclidianas. Esses trabalhos eram parecidos com os de Saccheri, negando o postulado das paralelas, demonstrando uma série de teoremas sem chegarem a contradições.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) teve o privilégio de mudar radicalmente o conceito de espaço, o objeto de estudo da geometria.

Riemann em uma conferência sobre Fundamentos da Geometria, propôs que os objetos a serem examinados na geometria fossem as variedades de dimensão n equipadas com uma métrica para determinar a distância entre pontos infinitamente próximos, de onde surge a possibilidade de calcular distâncias em espaços de dimensões maiores que três. Para ele as retas seriam as geodésicas enquanto os planos deveriam ser de dimensão dois.

Eugênio Beltrami (1835-1900) exibiu um modelo de geometria não-euclidiana, mais especificamente, para a Geometria Hiperbólica, que permitia interpretar os fatos dessa geometria em termos da própria geometria euclidiana.

Outros modelos foram construídos por *Felix Klein* (1849-1925) e Henri Poincaré (1854-1912), também se apoiando na Geometria Euclidiana.

Para se negar a unicidade das paralelas descrita no quinto postulado de Euclides há dois caminhos: um é axiomatizar que existe mais de uma reta paralela a uma outra reta passando por um ponto dado, o outro é axiomatizar a não existência de retas paralelas.

Para melhor entender esses enunciados e outros colocados posteriormente, faz-se necessário lembrar os cinco postulados de Euclides:

1º – Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade.

2º – Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente.

3º – Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários.

4º – Todos os ângulos retos são iguais.

5º – Se uma reta secante a duas outras formam ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado (COUTINHO, 2001).

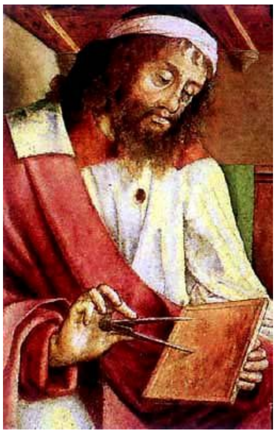
O V postulado de Euclides, ele pode ser reformulado numa linguagem mais moderna como:

“dado uma reta qualquer e um ponto fora desta reta, existe uma única reta paralela à reta dada, passando por esse ponto”.

DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO DO COLÉGIO ESTADUAL RACHEL DE QUEIROZ ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO DE IVATÉ

Pesquisa na internet sobre Geometria Euclidiana

Ao solicitar aos alunos que pesquisasse sobre as geometrias euclidianas foi notado que os alunos no geral tinham uma idéia muito abstrata sobre geometria, embora toda geometria vista por eles tenha sido euclidiana, eles simplesmente estudaram como geometria. Ao comentar sobre a existência de geometria não Euclidianas antes fazemos um rápido relato sobre a geometria de Euclides.



www.mat.uc.pt/.../image002.jpg

Pouco se sabe sobre a vida e a personalidade de Euclides. Foi um matemático grego provavelmente oriundo de Atenas, por volta de 300 a.C. Escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos desde óptica, astronomia, música e mecânica. Entre as obras sobreviveram até hoje: Os Elementos, Os Dados, Divisão de figuras, Os Fenômenos e Óptica, destacando “Os Elementos”.

Após a pesquisa e com auxílio de régua, compasso, transferidor, os alunos construíram triângulos, retas paralelas, circunferência, quadriláteros e aproveitaram para medir comprimento, ângulos internos e externos.

Em seguida foi apresentado um mapa mundi e nele traçado algumas retas unindo dois pontos.

Aproveitando os pontos escolhidos por eles e a escala do mapa foi calculado a distância entre esses dois pontos. Depois os mesmos pontos foram transferidos ao Globo Terrestre e daí surgiu a interrogação, no mapa podemos observar uma semi-reta perfeita, mas no globo, uns dizem uma reta outros dizem que não, era uma curva.

Todos os alunos uniram os dois pontos pela menor distância, ao prolongar essa semi-reta todos perceberam que formou um arco, e este era o maior arco possível, dividindo a superfície da esfera em duas partes iguais.

Foi então apresentado o conceito de geodésica.

Ao pedir que fizessem várias geodésicas em uma bola comum de plástico, e perceberam que todas essas geodésicas se interceptavam em dois pontos com outra, com isso descobriram que não tinha como traçar duas geodésicas paralelas na superfície esférica.

Nessa Geometria não existem retas paralelas, pois quaisquer duas geodésicas sempre se interceptam em dois pontos.

Diante dos fatos apresentados, foi sugerido que marcassem dois pontos e por esses traçar mais de uma geodésica. Todos acharam que seria impossível. Ao tomarmos o globo terrestre e verificar que todos meridianos formariam geodésicas e que todos tinham dois pontos comum, chegaram a conclusão que por dois pontos opostos em uma superfície esférica podeira passar infinitas geodésicas, contrariando o enunciando de Euclides que diz: por dois pontos passa apenas uma reta.

Um aluno ao verificar o globo terrestre, perguntou se os paralelos também eram geodésicas.

Ao marcar dois pontos sobre um paralelo, que não fosse a linha do equador, e com uma régua flexivel tentaram unir os dois pontos, tão logo notaram que a menor distância entre esses dois pontos não seguia o mesmo trajeto do paralelo.

Em seguida foi apresentada a história do urso.

“Um urso polar saiu caminhou 10 Km ao sul. Depois virou ao oeste e caminhou mais 10 Km. Então virou e caminhou novamente por mais 10 Km ao norte, chegando ao local de origem”. Qual era o seu ponto de origem?

Primeiramente foram feitas várias tentativas dessa trajetória usando uma folha de caderno, os alunos perceberam que seria impossível o urso retornar a origem, o seu trajeto formaria um quadrado, faltando um dos lados, portanto, ao final estaria a 10 km da origem.

Ao transferir o problema para ser analisado no globo terrestre depois de várias tentativas conseguiram verificar que o urso só poderia estar exatamente no pólo norte, e que seu trajeto formaria um triângulo.

Aproveitando dessa descoberta, os alunos fizeram vários triângulos em bolas de isopor, e perceberam que quanto maior o triângulo maior seria a soma dos ângulos internos, mas que esses triângulos, eram diferenciados de um triângulo na figura plana foi então apresentado o conceito de ângulo e polígono esférico:

O ângulo esférico é definido como sendo a interseção de duas geodésicas e sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes à superfície esférica no ponto de intersecção.

Os polígonos são definidos pela porção da superfície esférica limitada pelos arcos das geodésicas.

Podemos destacar que na geometria esférica:

Os triângulos congruentes são obrigatoriamente semelhantes;

A fórmula HL/2, usada para calcular a área de um triângulo euclidiano não é válida;

Não existem retângulos;

Por dois pontos podem passar infinitas retas (pontos opostos em uma superfície esférica);

Por um ponto P fora de uma reta r, não passa nenhuma reta paralela a r.

GEOMETRIA EUCLIDIANA	GEOMETRIA ESFÉRICA
Plano	Superfície Esférica
Ponto	Ponto
Reta	Geodésica, círculo máximo ou grande círculo
Segmento de Reta	Arco de geodésica
Dois pontos determinam uma reta	Dois pontos determinam uma (reta) geodésica

Foi comentado que, além da geometria esférica existem outras geometrias não-euclidianas, dentre elas a hiperbólica, a do taxi, a projetiva, etc.

Os alunos foram auxiliados para construção de duas figuras em gesso, uma que identificasse uma sela e outro uma figura da internet conhecida como pseudo-esfera.

Foi pedido aos alunos como seriam as retas nessas superfícies, dos que responderam disseram que formariam geodésicas como na esfera.

Quando marcaram dois pontos na figura que representava uma sela, ao unir com auxílio de uma régua flexível tão logo puderam perceber que muitas formariam curvaturas opostas, perceberam também que muitas não se interceptavam. Quando duas retas não interceptam em nenhum ponto, pelo enunciado de Euclides elas seriam paralelas. Muitos alunos não aceitaram esse conceito de paralela, vendo que duas retas em certos espaços estariam próximas e em outros estariam distantes. Passando para a pseudo-esfera, não foram diferentes os resultados.

Como ficariam os triângulos, os quadriláteros, sobre uma superfície hiperbólica?

Usamos uma lixa fina para polir a superfície dos objetos apagando as retas desenhadas anteriormente, e construíram vários triângulos, observando que quanto maior o triangulo menor seria a medida de seus ângulos internos, percebendo assim que estava acontecendo o inverso da superfície esférica.

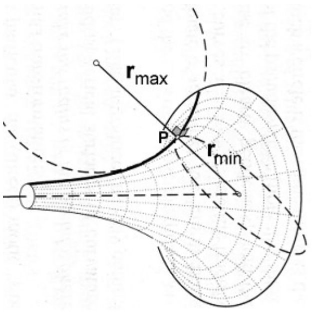
Será que a área de uma figura esférica ou hiperbólica seria a mesma da geometria euclidiana?

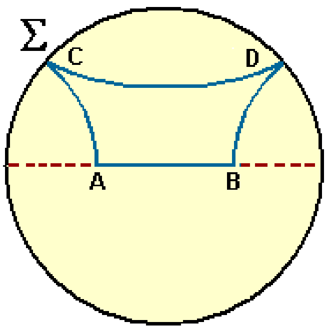
De imediato alguns disseram que sim, depois começaram a analisar as figuras e chegaram a conclusão que na esfera os lados se curvavam para fora da figura, aumentando assim a área, e que na pseudo-esfera as retas se curvavam para o interior da figura ficando a área menor.

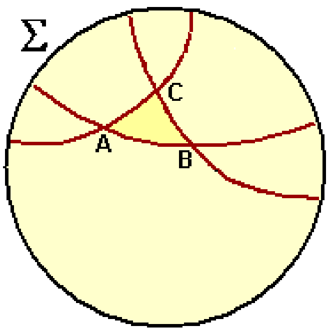
Tomando um pedaço de tecido tentaram assentar sobre as superfícies, notando que para a esfera sobrava tecido e nas figuras hiperbólicas tiveram que fazer alguns recortes para assentar.

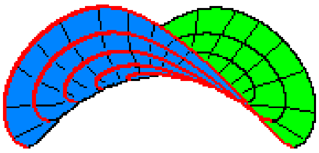
Os alunos pesquisaram na internet algumas figuras hiperbólicas, imprimiram e trouxeram para aula, encontraram as figuras do tipo sela, pseudo-esfera e entre outras o disco de Poincaré.

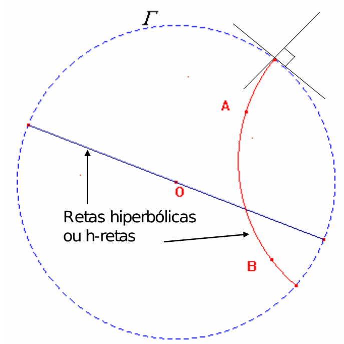
Outro modelo para a representação da Geometria Hiperbólica foi desenvolvido por Henry Poincaré, denominado *disco de Poincaré*.











www.searadaciencia.

ufc.br

Alguns modelos de figuras apresentado pelos alunos

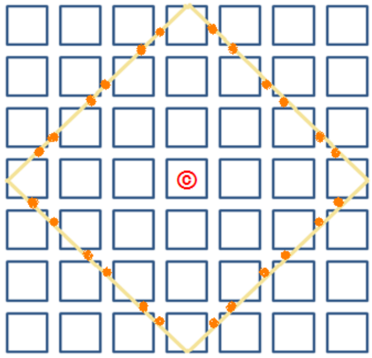
No disco de Poincaré, considera-se como plano um círculo euclidiano de onde é retirada sua circunferência ∑. Neste modelo as retas são arcos de círculos perpendiculares ao círculo que representa o plano hiperbólico.

Para construir retas, triângulos e quadriláteros, uma das melhores maneiras foi com o auxilio do software geométrico Geogebra.

Utilizando um laptop e data show, foram apresentadas várias retas, triângulos e quadriláteros hiperbólicos, entre os quais o Quadrilátero de SACCHERI e o de LAMBERT.

Quanto a Geometria do Táxi, os alunos conseguiram na prefeitura uma planta projetada da Cidade de Ivaté e começamos a verificar as maneiras que os alunos poderiam chegar até ao colégio. Alguns teriam vários caminhos que dariam a mesma distância, no entanto, se tratava de uma Geometria Não-Euclidiana, onde há vários caminhos para se chegar de um ponto a outro com a menor distância, embora essa distância não são retas, mas sim trajetos de percurso.

Um outro exemplo apresentado foi a figura abaixo, onde puderam observar que se riscassem entre os quadrados para se chegar de © a cada ponto ✹ a menor distância seria igual para todos, e que na geometria euclidiana os pontos eqüidistantes de um ponto no centro formaria um arco de circunferência.



Muitas vezes nos empolgamos com determinados conteúdos, mas esquecemos de comentar sua história e seus autores, é como se os conteúdos dos livros didáticos fossem criados ou descobertos pelo autor do livro.

Os alunos depois de ter idéia do que é uma geometria euclidiana tem maior facilidade de entender outras geometrias.

TRABALHO APRESENTADO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA REDE ESTADUAL DE EDUCAÇÃO DO NRE DE UMUARAMA E NO GTR COMO MATERIAL DIDÁTICO

A GEOMETRIA HIPERBÓLICA

Esta Geometria foi desenvolvida, independentemente, por Nicolay Lobachevsky, e simultaneamente por Janos Bolyai.

Nicolay dedicou mais de vinte anos à sua descoberta. A primeira apresentação pública de seu trabalho foi na Sociedade de Física-Matemática da cidade de Kazan, em 1.826, sem nenhuma aceitação; suas afirmações punham em dúvida a inquestionável geometria de Euclides.

Janos em uma carta a seu pai Farkas Bolyai escrevia em 1823: Resolvi publicar um trabalho sobre as teorias das paralelas, tão logo tenha o material organizado... o objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas... do nada criei o universo. Em contrapartida Farkas, que passou a vida inteira tentando provar o postulado das paralelas, quando soube que seu filho também estava absorvido pelo problema, escreveu-lhe: Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isto quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar o seu tempo todo e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida!...

Bolyai não mostrou nenhuma indecisão nas suas convicções, porém não aprofundou as suas idéias, como fez o russo Lobachevsky, que foi o primeiro a expor publicamente as suas descobertas. A Geometria Hiperbólica ficou também conhecida como Geometria de Lobachevsky.

A Geometria hiperbólica admite todos os postulados da Geometria Euclidiana, exceto o quinto, ou o das paralelas, que é substituído pelo que se segue:

“Por um ponto P fora de uma reta r passa mais de uma reta paralela à r”.

Um dos modelos para representar a geometria hiperbólica é o de uma superfície com curvatura negativa.

Uma superfície que atende esse requisito é vista na FIGURA 1. Pelo seu aspecto esta superfície recebeu o nome de sela. Verifica-se que, em qualquer ponto dessa superfície, duas curvas se cruzam com curvaturas para lados opostos. Isso faz a curvatura ser negativa.

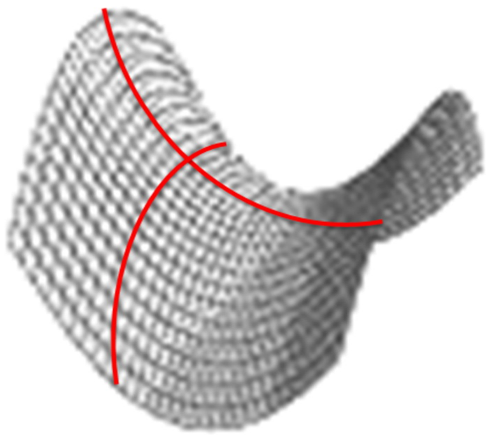


FIGURA 1 - autores

Beltrami usou outra superfície mais conveniente que a sela para representar a geometria hiperbólica. Ele chamou essa superfície de **pseudo-esfera**, e mostrou que ela exibe as propriedades requeridas pela geometria hiperbólica de curvatura negativa. Isto é, em qualquer ponto da pseudo-esfera, do mesmo modo que na sela, curvas se cruzam com curvaturas em sentidos opostos. É possível ver isso na FIGURA 2B que mostra um modelo da pseudo-esfera que poderá ser construída fazendo a tractriz (FIGURA 2A) girar em torno do eixo.

Para se determinar uma reta na pseudo-esfera, marcam-se dois pontos quaisquer e una-os de tal forma que a curva obtida determina menor distância possível entre os pontos (uma curva em qualquer superfície, que fornece a menor distância entre dois pontos é chamada de GEODÉSICA). Assim teremos infinitas retas em várias direções.

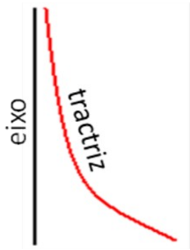


FIGURA 2ª – autores

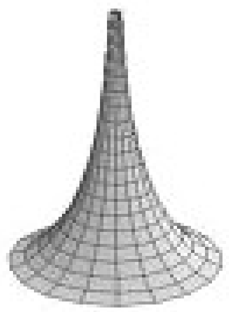


FIGURA 2B – autores

Em um modelo de pseudo-esfera dado na FIGURA 3A, as retas L_2 e L_3 são paralelas a L_1 e se interceptam num mesmo ponto P.

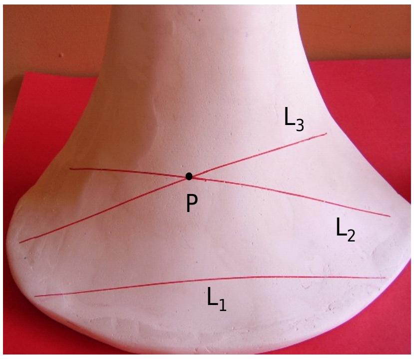


FIGURA 3A – autores

FIGURA 3B – autores

A soma dos ângulos internos dos triângulos apresentados na FIGURA 3B é menor que 180º.

Quanto maior o triângulo, menor é a soma dos ângulos internos.

Observe a FIGURA 4 a seguir, ao se colocar um círculo sobre uma superfície hiperbólica pode-se notar que o círculo se assentará sobre a superfície, somente quando se faz alguns recortes, isso indica que o perímetro da circunferência é maior $2\pi r$, e a área é maior que πr^2.

FIGURA 4 – autores

Outro modelo para a representação da Geometria Hiperbólica foi desenvolvido por Henry Poincaré, denominado *disco de Poincaré*.

Neste modelo, considera-se como **plano** um círculo euclidiano de onde é retirada sua circunferência Γ. Nele, os **pontos** são os mesmos considerados na Geometria Euclidiana e as **retas** são os diâmetros do círculo e os arcos de circunferências que forma com Γ um ângulo reto, isto é, as tangentes a Γ e ao arco, no ponto de interseção destes, são perpendiculares entre si. Veja FIGURA 5A a seguir.

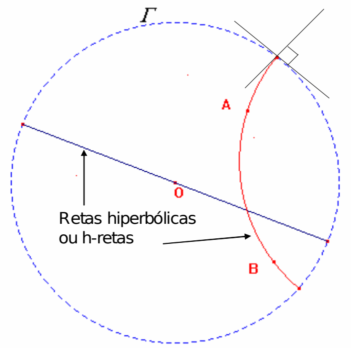


FIGURA 5A – autores

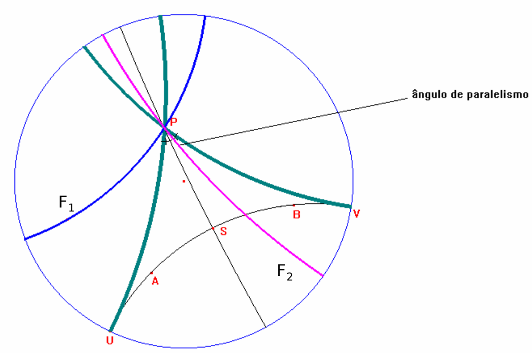


FIGURA 5B – autores

Na FIGURA 5B a reta F_1 é paralela à reta que passa por A e B, e a reta F_2 secante a reta que passa por A e B. Todas as retas que estão no ângulo de paralelismo, intercepta a reta que passa por A e B, todas as outras retas serão paralelas as retas por A e B. Assim, por um ponto P podem passar infinitas retas paralelas a reta que passa por A e B, contrariando o quinto postulado de Euclides.

Chamamos de **triângulo hiperbólico**, um triângulo formado por segmentos de retas hiperbólicas. Na FIGURA 6, temos uma figura de um triângulo hiperbólico. A soma dos ângulos internos do triângulo hiperbólico formado pelas retas é menor que 180º.

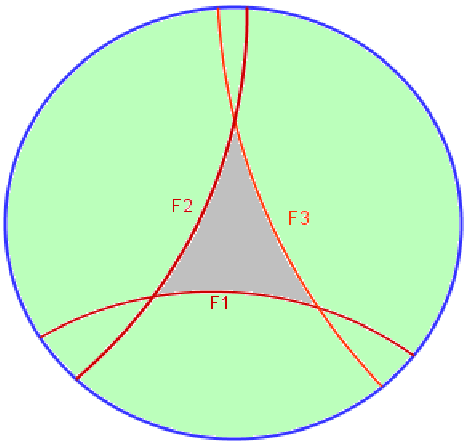


FIGURA 6 – autores

O Jesuíta Girolomo Saccherri na tentativa de provar o 5º Postulado de Euclides criou um quadrilátero que ficou conhecido por Quadrilátero de Saccheri. Este quadrilátero tem dois ângulos retos. A base CD é menor que o topo AB, como mostra a FIGURA 7, do quadrilátero representado no disco.

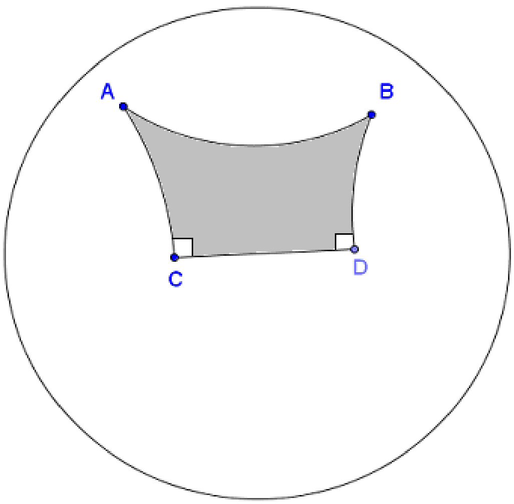


FIGURA 7 – autores

O Suiço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) na tentativa de provar o quinto postulado de Euclides, conseguiu construir um quadrilátero com três ângulos retos, conhecido atualmente como Quadrilátero de LAMBERT. FIGURA 8.

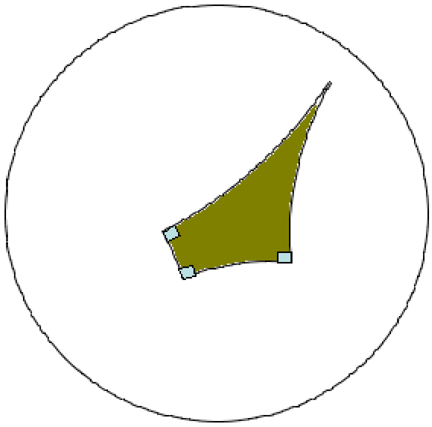


FIGURA 8 – autores

Com essas representações fica fácil verificar que o quinto postulado de Euclides não é válido para um espaço hiperbólico.

A seguir destacamos alguns resultados da Geometria Hiperbólica, que serão apenas enunciados nesse trabalho, porém suas demonstrações podem ser encontradas em GREENBERG (1974).

- Na geometria Euclidiana dois triângulos podem ser semelhantes e não serem congruentes, enquanto que na geometria hiperbólica os triângulos semelhantes são obrigatoriamente congruentes, ou seja, tem que possuir as mesmas medidas;

- A área de um triângulo euclidiano é dada por LH/2, onde L é o comprimento de um lado do triângulo e H a altura relativa ao respectivo lado, o que não é válido para os triângulos hiperbólicos;

- Na geometria hiperbólica não existem retângulos, os quadriláteros terão no máximo três ângulos retos.

- Na geometria euclidiana se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si, o mesmo não se pode dizer para a Geometria Hiperbólica.

GEOMETRIA ESFÉRICA

Após a Geometria Hiperbólica, surgiu então a possibilidade de novas geometrias, foi então que o matemático alemão Riemann, criou a Geometria Elíptca ou Esférica.

Nesta geometria, abandona-se a noção de retaq infinita como na Geometria Euclidiana, mas sim limitada.

Tal geometria foi considerada pela primeira vez na aula inaugural pronunciada em 1851 por Riemann para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Gottingen. Na oportunidade Riemann apontou as possibilidades de outras geometrias e, conseqüentemente, outros espaços, o que motivou, a partir de então, os nomes geometrias ou espaços de Riemann.

Algumas noções básicas de geografia podem ajudar a interpretar esta geometria, já que vivemos em um planeta que possui uma forma quase esférica.

A geometria esférica tem sido muito empregada nas rotas aéreas e marítimicas.

Iniciemos propondo alguns raciocínios.

1. Suponhamos que um navio parte de um ponto da linha do equador e navega mil quilômetros no sentido norte, em seguida gira 90º e navega mais mil quilômetros para o leste, depois gira 90º e navega mais mil quilômetros no sentido

sul. Ao final desse trajeto qual foi o caminho percorrido e qual o deslocamento?

2. Se conseguíssemos esticar uma corda de 500 quilômetros em cima do mar, para que ela ficasse em nível, será que formaria uma reta euclidiana?

3. Ao tomarmos um círculo euclidiano de raio 1000 quilômetros, como esse círculo ficaria se fosse colocado sobre a terra? O que ocorre com as áreas e os perímetros, se compararmos antes e depois da colagem?

4. Ao desenharmos um triângulo na superfície de uma esfera, o que podemos dizer sobre a soma das medidas de seus ângulos internos?

5. Imaginemos que um avião vai de São Paulo a New York, percorre aproximadamente oito mil quilômetros. Se ao invés de percorrer a trajetória como uma geodésica, o avião a percorresse como uma linha reta euclidiana, o que aconteceria com esse avião?

Problemas como esses, quando falamos em geometria plana fica simples sua visualização no papel. Necessitamos de alguns cálculos simples para se obter o resultado. Mas quando falamos em geometria esférica a visualização, os cálculos já não são tão simples.

Analisando o primeiro problema, vemos que a distância percorrida será de três mil quilômetros, idêntico à geometria plana, mas o deslocamento (distância entre o ponto inicial e final) que na geometria plana seria de um mil quilômetros, na esférica pode ocorrer de ser maior ou menor. Esse deslocamento (observe a FIGURA 9) é o comprimento do arco **OF**, lembrando que este arco é o arco do círculo máximo que passa por O e F, e tem como centro o centro da terra.

Portanto o deslocamento depende da posição inicial. Se o ponto inicial fosse o pólo, neste caso o sul, o deslocamento seria zero, ou seja, retornaria ao ponto de origem e a trajetória descreveria um triângulo.

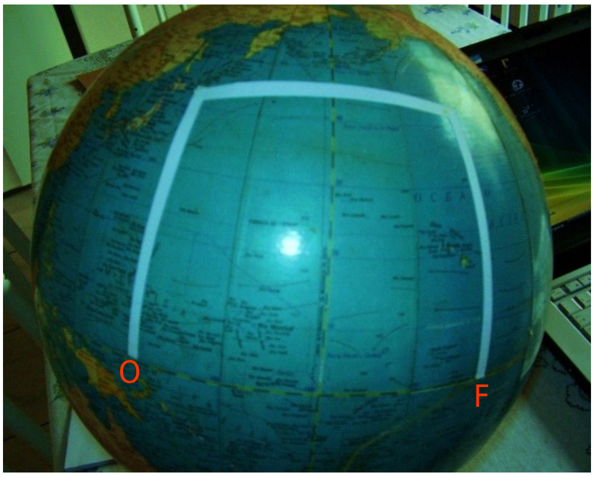


FIGURA 9 – autores

No segundo problema, é fácil verificar que a corda esticada formaria uma geodésica, ou seja, nesse caso, obedece a curvatura da terra. Parece estranho, mas ficaria em nível. Todos os pontos da geodésica estariam à mesma distância do centro da terra.

FIGURA 10 – autores

No terceiro problema, podemos verificar na FIGURA 11A, que o círculo euclidiano formaria uma aba sobre a terra. Vejamos na FIGURA 11B, que o círculo construído, ao tentá-lo assentar-se sobre a superfície esférica nota-se sobra de tecido, portanto, a área e o perímetro desse círculo após assentar sobre a superfície tornam-se menor que do círculo euclidiano.

FIGURA 11A – autores

FIGURA 11B – autores

Para analisarmos o quarto problema, observemos inicialmente que o triângulo **ABC** da FIGURA 12, possui três ângulos retos, portanto a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo **ABC** é igual a 270º. Assim, neste triângulo a soma das medidas dos ângulos internos é maior que 180º.

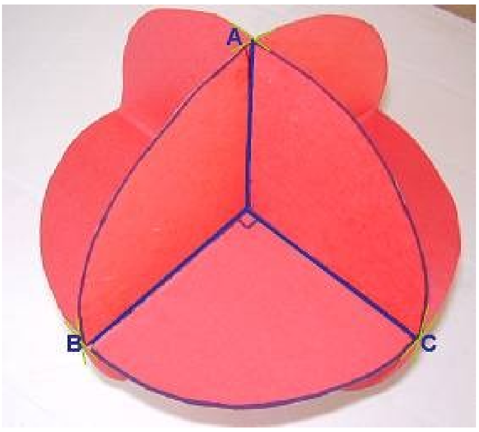


FIGURA 12 – autores

Veja na FIGURA 13 a seguir, mais um exemplo.

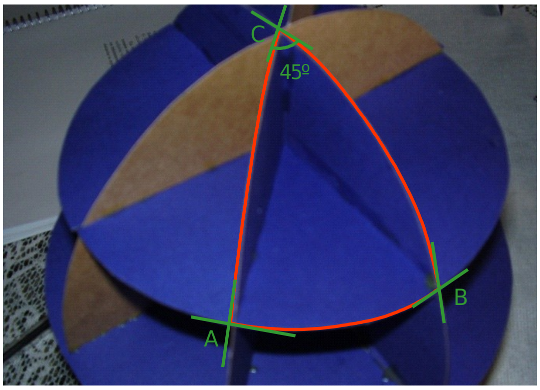


FIGURA 13 – autores

Neste caso, o triângulo **ABC** possui dois ângulos retos, um em A, e outro em B, e um ângulo C que mede 45º. Somando todas as medidas dos ângulos, obtemos 235º.

Quanto menor for o triângulo esférico, mais a soma das medidas dos ângulos internos se aproxima da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo euclidiano, ou seja, 180º. Podemos comparar na FIGURA 14.

FIGURA 14 – autores

A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico não é constante, isto é, varia entre 180º e 540º.

Finalmente, para responder o quinto problema, acompanhe a trajetória do avião, dada na FIGURA 15. Se o avião deixasse de acompanhar a curvatura do planeta terra, sua trajetória seria uma tangente ao globo terrestre, portanto se perderia no espaço.

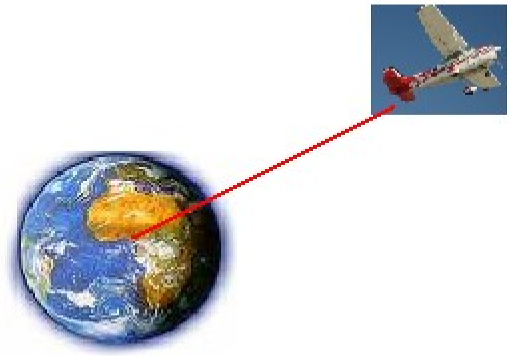


FIGURA 15 – autores

Adotamos então como modelo da geometria esférica, o **plano,** como sendo a superfície de uma esfera, os **pontos** são os pontos euclidianos sobre a superfície dessa esfera e as **retas** por dois pontos quaisquer nessa superfície esférica é a circunferência passando por eles e tendo como centro, o centro da esfera. O plano que contém essa circunferência vai dividir a esfera em duas partes iguais, FIGURA 16.

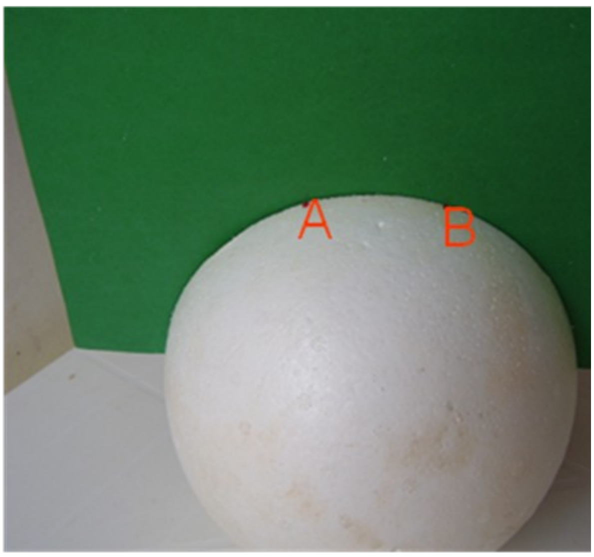


FIGURA 16 – autores

Na geometria esférica não existem retângulos. Considerando que os quadriláteros possam ser divididos, formando dois triângulos, e como vimos na FIGURA 14, que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a 180^0, podemos concluir que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero esférico é superior a 360^0.

FIGURA 17 – autores

Podemos traçar infinitas retas sobre uma superfície esférica e observar que todas elas se interceptam. Dessa forma, na geometria esférica não existem retas paralelas.

Se tomarmos dois pontos opostos de um globo, podemos verificar que por esses dois pontos passam infinitas retas, o que contradiz também o primeiro postulado de Euclides, a saber, que dois pontos determinam uma única reta.

Podemos destacar que na geometria esférica:

- Os triângulos congruentes são obrigatoriamente semelhantes;

- A fórmula HL/2, usada para calcular a área de um triângulo euclidiano não é válida;

- Não existem retângulos;

- Por dois pontos podem passar infinitas retas (pontos opostos em uma superfície esférica);

- Por um ponto P fora de uma reta r, não passa nenhuma reta paralela a r.

A GEOMETRIA DO TÁXI

Criada pelo matemático Hermann Minkowisk (1864-1909) e designada por Taxicab Geometry (Krause, 1975), em português designada como geometria do motorista de táxi. Ela está muito relacionada com a realidade do aluno em seu trajeto pela cidade, ou de sua casa até a escola.

Nesta geometria a menor distância entre dois pontos não é definida por uma linha reta, é como um táxi fazendo um trajeto entre ruas e avenidas de uma cidade.

Portanto, podem existir *n* caminhos que vão de um ponto a outro e que muitos tenham a mesma distância.

Na FIGURA 18, os quadrados representam as quadras em uma cidade e entre elas passam as ruas e avenidas. Supondo que um táxi vai deslocar do ponto A ao ponto B, qual seria o caminho mais curto?

Podemos observar que há muitas maneiras de chegar até B, e que terão a mesma distância. Aqui estão marcadas três opções do percurso mais curto, mas são várias.

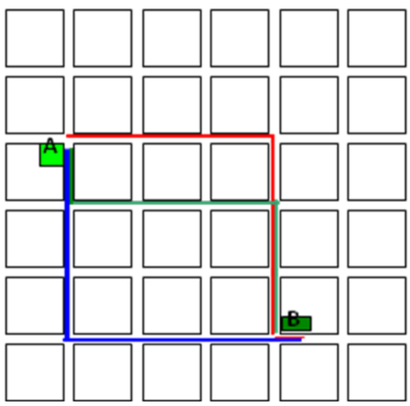


FIGURA 18 – autores

Observe na FIGURA 19 o Ponto **0**, com sendo o ponto de intersecção das diagonais do quadrado em destaque, e os intervalos entre os quadrados menores como sendo caminhos para se chegar de 0 até os pontos indicados (●), podemos perceber que a menor distância é igual para todos os pontos.

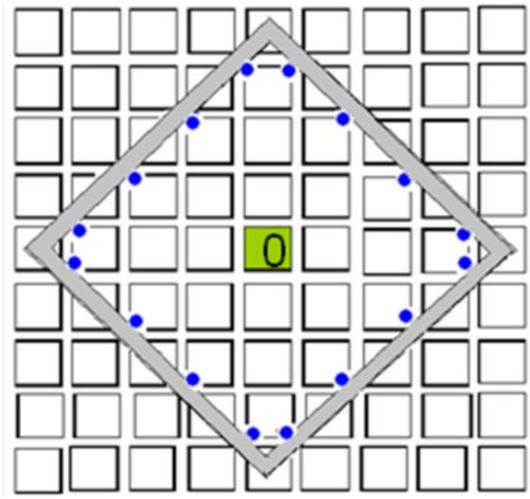


FIGURA 19– autores

Na geometria euclidiana esses pontos eqüidistantes formaria uma circunferência de centro em **0 e** a menor distância entre **0** a cada ponto seria o raio.

GEOMETRIA PROJETIVA

A geometria projetiva surge com as dificuldades dos artistas do Renascimento, para dar aos quadros que pintavam uma forma real dos objetos inspirados de modo que as pessoas ao olharem o identificassem sem dificuldades.

Isso levou os artistas a estudarem profundamente as leis que determinassem a construção dessas projeções, com esses estudos eles chegaram a teoria fundamental da perspectiva geométrica, que se expandiu, por um pequeno grupo de matemáticos franceses motivado por Gerard Desargues. Desargues publicou um tratado original sobre sanções cônicas, aproveitando idéias de projeção, mas esse trabalho foi ignorado e esquecido pelos matemáticos da época e todas as publicações desapareceram.

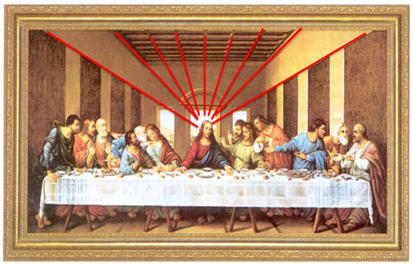
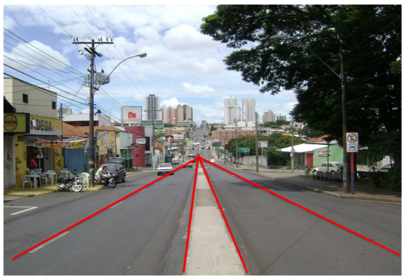
Mas o geômetra Michel Chasles, conseguiu ressuscitar o trabalho de Desargues ao escrever sobre a história da geometria, pois encontra uma cópia manuscrita de seu estudo feita por um de seus seguidores, assim o trabalho de Desargues foi reconhecido como um dos clássicos no desenvolvimento da geometria projetiva.

O ressurgimento da Geometria projetiva foi impulsionado por Poncelet, um prisioneiro de guerra russo, que sem livros nas mãos criou sua grande obra sobre a geometria projetiva publicada em 1822 com o título de "Tratado das propriedades projetivas das figuras". Esta obra deu início ao chamado "grande período da história da geometria projetiva", que abriu espaço aos grandes matemáticos. O trabalho de Desargues e Poncelet levaram os geômetras a classificar a geometria em duas categorias:

Propriedades métricas, que interveêm nas medias das distâncias e dos ângulos e as Propriedades descritivas, que tratam das relações e posições dos elementos geométricos entre si.

"A Geometria Projetiva criou uma grande área da geometria única e elegantemente desenvolvida em básica para muitos estudos geométricos".

Nas figuras apresentadas podemos observar que as paralelas do objeto real, ao ser transferida para um projeto (plano), perde a noção de paralelas, portanto, na geometria projetiva não existem paralelas.

Ao trabalharmos geometria em sala de aula, ficamos restritamente presos à geometria euclidiana, e quase sempre sem comentar o autor, portanto, para maioria de nossos alunos, eles conhecem simplesmente como geometria. Ao comentar sobre as geometrias não euclidianas, faz-se necessários tecer alguns comentários e exemplos da geometria euclidiana, para assim eles assimilarem as diferenças entre elas.

Aos professores que também pouco conhecem as geometrias não euclidianas, fica mais fácil perceberem essas diferenças. A maior dificuldade proposta é a falta de material didático disponível nas escolas.

CONCLUSÃO

Ao se trabalhar um conteúdo em sala de aula exige-se um aprofundamento do mesmo, conhecer sua origem e aplicações, saber além do que se pretende ensinar, e as geometrias não euclidianas ainda é pouco conhecida pelos professores da educação básica.

Existem várias geometrias não euclidianas que podem ser trabalhadas ao longo das séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Notamos nessa implementação, que é possível trabalhar essas geometrias, paralelamente às geometria euclidianas, fazendo com que os alunos percebam as diferenças entre elas. O bom profissional na área da educação não deve se limitar aos conteúdos dos livros didáticos. Pouco são os autores que comenta sobre essas geometrias, e quando comenta é de forma muito superficial, não dando segurança ao trabalho do professor. Trabalhando com os professores de matemática da educação básica do Estado do Paraná, vê-se a necessidade de uma capacitação sobre as geometrias não euclidianas, uma vez que elas estão sendo contempladas nas Diretrizes Curriculares.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, PLÁCIDO F. A.; Introdução à geometria hiperbólica plana, o disco de Poincaré. UFC, 2006.

BIGODE, Antonio J. Lopes. Matemática hoje é feita assim – 8ª série. Rio de Janeiro: FTD. 2002.

CARMO, M. P., Geometrias não-euclidianas. Revista Matemática Universitária. Rio de Janeiro, (6), dez. 1987.

COUTINHO, Lázaro. Convite às geometria não-euclidianas, Ed. Interciência, 2001.

GOLVEIA, Flávio Roberto. Uma abordagem de ensino-aprendizagem da geometria esférica através do computador. Artigo. Centro Universitário Paulistano – Unipaulista. São Paulo, SP.

KALEFF, Ana Maria M.R; NASCIMENTO, Rogério Santos. Atividades introdutórias às geometrias não-eclidianas: O exemplo da geometria do táxi. Boletim GEPEM nº44, 2004.

MARQUESE, João Pedro. As faces dos sólidos na superfície esférica: Uma proposta para o ensino-aprendizagem de noções básicas de geometria esférica. Mestrado em educação matemática. PUC-SP, 2006.

PETTIT, Jean-Pierri. As aventuras de Anselmo curioso. Rd. Publicações Dom Quixote. Lisboa, 1982. 1ª edição.

POINCARÉ, H. A ciência e a hipótese. Tradução de Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília, DF. Universidade de Brasília, 1884. 180 p.