Trabalhando com a Resolução de Problemas na Educação Básica

José Vagner Chiréia[1]

Resumo

O material tem por objetivo apresentar um relato de uma experiência desenvolvida em aulas regulares e com os conteúdos regulares, em duas turmas de terceiro ano do Ensino Médio, do período noturno, com a utilização da estratégia metodológica de Resolução de Problemas, que oportuniza ao aluno trabalhar em grupo, desenvolver sua autonomia, elaborar conjeturas, estabelecer conexões, elaborar e validar estratégias/procedimentos além de utilizar instrumentos tecnológicos como calculadoras e computadores. Com a utilização da Resolução de Problemas as aulas tornaram-se mais atraentes proporcionando aos alunos momentos de reflexão e refinamento de conceitos matemáticos, considerando que é pela interação dos indivíduos com o conhecimento historicamente produzido que se dá a apropriação do mesmo.

PALAVRAS CHAVES: Ensino de Matemática; Resolução de Problemas; Aprendizagem em Matemática.

Abstract

The aim of this material is present the report of an experience developed in regular classes and also with regular contents in two classes of third year of high school, of the night shift, with the use of methodological strategy for Resolution of Problems. This strategy enables to student work in groups, develop their autonomy, elaborate conjectures, establish connections, develop and validate strategies/procedures, in addition to use technological tools like calculators and computers. With the use of Resolution of Problems, the classes have become more attractive to students by providing moments of reflection and refinement of mathematical concepts, the interaction of individuals with knowledge historically produced will give to students the ownership this knowledge.

Key-words: Maths Education. Problem Solving. Teaching-learning.

Introdução

No dia a dia das aulas de matemática é bastante comum a utilização de exercícios repetitivos, o que usualmente é chamado de “fazer a fixação do conteúdo”. Com isso, pode-se provocar nos alunos uma falsa idéia de que a mera repetição de técnicas e algoritmos proporciona o aprendizado.

---

[1] Professor da Rede Pública do Estado do Paraná, participante do Programa de Desenvolvimento da Educação (PDE).

Também é comum a utilização de "problemas"[2] nas aulas de matemática, mas que muitas vezes não despertam curiosidade nos alunos, nem mesmo provocam algum desafio. Isso porque quase sempre são problemas "tipo", ou seja, problemas muito semelhantes aos exemplos que o próprio professor resolve no quadro de giz, como modelo, em aulas organizadas, segundo Buriasco (1995, p.01) "no esquema:

- exposição do conteúdo;
- exemplos;
- exercícios simples de fixação;
- exercícios um pouco mais "complicados";
- problemas."

Em geral as dificuldades apontadas como as mais comuns na resolução de problemas, dizem respeito à compreensão de textos dos enunciados, à interpretação de informações, à tradução do enunciado para uma linguagem matemática adequada e à associação entre conteúdos.

A estratégia da Resolução de Problemas é uma possibilidade para reverter o quadro apresentado, uma vez que pode proporcionar condições para que o aluno enfrente novas situações e, de forma gradativa amplie seu conhecimento, encarando a aprendizagem como um "problema" para o qual se tem que encontrar respostas. É nessa perspectiva que se apresenta este trabalho, e nela, um problema é uma situação na qual um indivíduo precisa ou quer fazer algo, mas desconhece como desenvolver o curso da ação necessária para conseguir fazer o que precisa ou quer.

A Resolução de Problemas como Estratégia

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989) o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece especial atenção nos currículos, uma vez que, um objetivo central do ensino de Matemática é que os alunos sejam capazes de pensar matematicamente e de resolver problemas. Além disso, a aprendizagem matemática requer um processo de reflexão contínua, até o momento em que as respostas passem a ter sentido, e com isso, entender Matemática não significa reproduzir modelos previamente estabelecidos.

---

[2] A palavra problemas aparece entre aspas porque na maioria das vezes, o que se apresenta aos alunos não são problemas de fato, e sim exercícios de fixação.

Brito (2005, p.60) ao considerar "os objetivos cognitivos que levam ao desenvolvimento das habilidades básicas", selecionadas pelo NCTM[3], em 1978, aponta a solução de problemas como uma das habilidades a ser desenvolvida no estudante.

Para Onuchic (1999, p.216), ao utilizar a estratégia da Resolução de Problemas nas suas aulas, "o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem". Assim, um problema pode, de acordo com o contexto e os alunos envolvidos, ter diferentes formas de ser resolvido.

A Resolução de Problemas como estratégia pode tornar as aulas mais atraentes, cooperativas, mais dinâmicas, fazendo com que os estudantes se relacionem com uma maior freqüência com os conteúdos matemáticos. Nessas aulas, o professor tem fundamental importância na escolha dos problemas ou na aceitação dos problemas propostos pelo aluno, para que despertem o interesse e desafiem a curiosidade. Como diz Butts (1997, p.48) "Estudar matemática é resolver problemas. Consequentemente cabe aos professores de matemática, em todos os níveis, ensinar a arte de resolver problemas". Um problema é visto aqui como sendo "*uma situação que se enfrenta sem contar com um algoritmo que garanta uma solução*" (KANTOWSKI, 1997, p.270). Ou ainda, como diz Polya (1997, p.01)

> [...] resolver um problema é encontrar um caminho onde nenhum outro é conhecido de antemão, encontrar um caminho a partir de uma dificuldade, encontrar um caminho que contorne um obstáculo, para alcançar um fim desejado, mas não alcançável imediatamente, por meios adequados.

A Resolução de Problemas pode se tornar ainda mais eficiente quando a dinâmica da aula envolve o trabalho com pequenos grupos de alunos. O trabalho em grupo pode trazer uma série de vantagens, como por exemplo, a possibilidade de observar as diferentes estratégias adotadas pelos parceiros ao enfrentarem um mesmo problema. Nessa estratégia, a análise dos procedimentos utilizados e a das atitudes tomadas pelos alunos se constitui em vasto material para a avaliação da aprendizagem. A observação atenta do professor apontará para o quanto o aluno compreendeu o problema e o quanto a resposta dada é adequada. Por conseguinte as respostas dos alunos deixam de ser consideradas apenas como certas ou erradas, uma vez que podem surgir da utilização de diferentes procedimentos e não faz sentido destacá-las deles.

---

[3] National Council of Supervisors of Mathematics.

A Resolução de Problemas envolve, segundo Polya (2006), quatro fases:

- *a compreensão do problema* - na qual é de fundamental importância que o aluno seja capaz de identificar o que o problema está solicitando.
- *o estabelecimento de um plano* - baseado no que já conhece e nas experiências já vivenciadas, o aluno escolhe o que acredita ser o ideal para resolução do problema. Caso o plano não surta o efeito esperado, reformula-se a idéia inicial e muda-se o plano de resolução.
- *a execução do plano* - esta etapa consiste em colocar em prática o(s) procedimento(s) escolhido(s) no estabelecimento do plano e que leva(m) a uma resposta para o problema proposto.
- *o retrospecto ou reflexão sobre a resolução* - na reflexão o aluno faz uma revisão dos procedimentos e cálculos efetuados, buscando possíveis erros na resolução e também dando validade ao resultado encontrado.

Butts (1997) considera cinco categorias de problemas: exercícios de reconhecimento, exercícios algorítmicos, problemas de aplicação, problemas de pesquisa aberta e situações-problema.

- *Exercícios de reconhecimento*: “Este tipo de exercício normalmente pede ao resolvedor para reconhecer ou recordar um fato específico, uma definição ou enunciado” (BUTTS, 1997, p.33);

- *Exercícios algorítmicos:* “[...] trata-se de exercícios que podem ser resolvidos com um procedimento passo-a-passo, frequentemente um algoritmo numérico” (BUTTS, 1997, p.34);

- *Problemas de aplicação*: “[...] envolvem algoritmos aplicativos. Os problemas tradicionais caem nesta categoria, exigindo sua resolução: (a) formulação do problema simbolicamente e depois (b) manipulação dos símbolos mediante algoritmos diversos” (BUTTS, 1997, p.34);

- *Problemas de pesquisa aberta*: “[...] aqueles em cujo enunciado não há uma estratégia para resolvê-los” (BUTTS, 1997, p.35);

- *Situações-problema*: “[...] neste subconjunto não estão incluídos problemas propriamente ditos, mas situações nas quais uma das etapas decisivas é identificar o(s) problema(s) inerente(s) a situação, cuja solução irá melhorá-la” (BUTTS, 1997, p.36).

Para resolver um problema, o aluno precisa utilizar suas competências para interpretá-lo, identificar os conceitos matemáticos presentes. Depois disso, é preciso lidar com esses conceitos de modo que seja possível realizar operações matemáticas para que, enfim, possam construir alguma solução lógica para a situação em que cada problema foi apresentado. Esse é um processo de pensar matematicamente, que segundo a perspectiva de Schoenfeld (1996, p.69),

> [...] ver o mundo de um ponto de vista matemático (tendo predileção por matematizar: modelar, simbolizar, abstrair e aplicar idéias matemáticas a uma larga gama de situações) [...].

Num processo de Resolução de Problemas podem-se mobilizar diferentes tipos de raciocínio.

> O *raciocínio analítico* é caracterizado por situações em que o indivíduo em aprendizagem tem de aplicar princípios da lógica formal quando determina as condições necessárias e as suficientes ou quando determina se a implicação de causalidade ocorre no âmbito dos constrangimentos e das condições fornecidas no estímulo do problema.
> O *raciocínio quantitativo* é caracterizado por situações em que o indivíduo em aprendizagem tem de aplicar propriedades e procedimentos relacionados com a percepção do número e com as operações numéricas da disciplina de Matemática, para resolver determinado problema.
> O *raciocínio analógico* é caracterizado por situações em que o indivíduo em aprendizagem tem de resolver um problema inserido num contexto semelhante ao contexto de um problema que lhe é familiar ou que inclui uma base problemática que o mesmo tenha resolvido no passado. Os parâmetros ou o contexto do novo material de estímulo foram modificados, mas os factores de condução ou o mecanismo causal são os mesmos. O indivíduo deve ser capaz de resolver o novo problema, interpretando-o à luz da experiência passada, relativamente à situação análoga.
> O *raciocínio combinatório* é caracterizado por situações em que o indivíduo em aprendizagem tem de examinar vários factores, considerar todas as combinações em que estes podem ocorrer, avaliar cada uma destas combinações individuais, em relação a um constrangimento objectivo, e depois seleccionar ou ordenar hierarquicamente as combinações. (OCDE, 2004, p.13).

De um modo geral,

> [...] os problemas devem oportunizar aprendizagens, de modo que alunos e professor, assumam uma atitude investigativa, de sorte que o professor pode questionar-se a respeito de qual matemática os seus alunos estão aprendendo, que entendimentos estão tendo do que está sendo trabalhado em sala de aula, o que sabem, no que ainda encontram dificuldades, e o que pode ser feito para auxiliá-los na superação destas (BURIASCO, 2007).

A estratégia de Resolução de Problemas, apesar de ser tratada aqui dentro do campo da matemática, procura despertar nos alunos o interesse por problemas em geral, desenvolvendo a capacidade de resolver problemas em qualquer área de conhecimento e nos mais diversos momentos de sua vida.

Proposta Inicial

Devidamente fundamentado nas atividades desenvolvidas e nos estudos efetuados, voltamos para sala de aula, para utilizar a estratégia da Resolução de Problemas em turmas regulares.

Durante a implementação, relatos foram produzidos como forma de registro das atividades. Desses, escolhemos três, totalizando seis encontros que foram aplicados em duas turmas de terceiro ano do Ensino Médio, do período noturno, do Colégio Estadual Ivanilde de Noronha do município de Arapongas.

As atividades relatadas têm como objetivo:

- utilizar procedimentos didáticos compatíveis com a estratégia da Resolução de Problemas e que podem ser utilizados por todo(a) professor(a) em seu trabalho;
- desenvolver nos alunos a capacidade de resolver problemas.

Esses relatos apresentam a estratégia de Resolução de Problemas, em sala de aula, mediante o desenvolvimento em aulas regulares e com os conteúdos regulares.

Cada atividade teve duração de 1 a 4 encontros, variando de 40 a 50 minutos, e aconteciam nas duas turmas, em aulas que se seguiam no horário. O período escolhido foi do 2º bimestre (maio, junho e julho) do ano de 2008 e sofreram as influências possíveis do cotidiano do colégio, entre elas jogos, período de provas, alunos gazeando aulas, alunos faltosos, movimentação de alunos na turma, entre outros.

No início do ano letivo as turmas, 3º ano B e 3º ano C, apresentavam na lista de chamada 34 e 29 alunos respectivamente, dois quais 5 já tinham sido transferidos para outro estabelecimento de ensino no início de maio e mais 8 não estavam freqüentando. Iniciamos assim as atividades com a participação de 50 alunos. No término das atividades constatamos que a maior freqüência nos encontros foi de 46 alunos e a menor foi de 28.

Sempre que se fizer necessário farei referência aos alunos com a seguinte nomenclatura:

- "A01; A02; A03;...;A51 e A52" quando a referência for para algum aluno especificamente;
- "Prof.", quanto a referência for para o professor;
- "GA", quando um grupo de vários alunos estiver sendo citado.

Relatos

ATIVIDADE 1 - 1º ENCONTRO:

Os trabalhos tiveram início, no laboratório de informática, com a presença dos alunos para que pudéssemos participar da introdução à atividade do encontro. Diante dos computadores solicitei que fizessem uma pesquisa utilizando o site de busca Google com o tema "Escher". Durante os primeiros minutos tive de descrever os passos para que os equipamentos fossem ligados, uma vez que era a primeira vez que a turma trabalharia nesse laboratório. Apesar de estar pronto a pelo menos um ano, os alunos não tinham tido acesso a ele até então. Durante os passos de inicialização, um problema que considero grave ocorreu, oito dos vinte computadores não ligaram corretamente, o que impossibilitou a sua utilização. Rapidamente contornei o problema reposicionando os alunos nos computadores restantes. Constatei que 6 dos 25 alunos presentes, não conheciam o site de busca Google, apesar de todos se dizerem conhecedores da internet.

Aproximadamente 15 minutos depois, todos os computadores já apresentavam endereços ligados a "Escher". Acessando os endereços listados pelo Google, a respeito das figuras que visualizavam os alunos comentavam:

A12 – *"Legal."*

A23 – *"Estranhas, começam de um jeito e terminam de outro!"*

A10 – *"Algumas são esquisitas."*

Após observação das figuras do artista Holandês Escher[4] solicitei que os alunos formassem grupos de três elementos e entreguei o problema nº1[5] solicitando que fizessem uma leitura do enunciado e indicassem a alternativa correta.

[4] Mauricius C. Escher
[5] http://mp12.inep.gov.br/enem2007/PROVA%20ENEM_2007_FINALLL_AMARELA.pdf

(ENEM-2007) Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida ao lado. Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

Durante o andamento da tarefa os grupos estabeleceram discussões no sentido de eliminar as figuras que não permitiam sua construção no mundo real. Um dos grupos havia decidido que a alternativa “A” não poderia ser a resposta, e, quando questionado um dos alunos responde:

A07 – *“A ripa de trás não pode passar para frente.”*

Em um dos grupos a discussão era que um dos alunos tentava convencer os outros que a alternativa correta seria a “C”. Diziam eles:

A18 – “*É a única que dá certo.”*

A32 – *“Não é a alternativa “C”, olha para as cores, cinza e preta!”*

Nesse instante o aluno A23 pega duas réguas com cores diferentes e uma caneta, tenta representar a figura e conclui dizendo ao grupo.

A23 –“*Olha aqui, as pontas ficam em direções diferentes.”*

Alguns minutos mais e começa a surgirem a resposta correta.

A37 – “*Professor a única que é possível de ser construída é a alternativa “E”.”*

Após a identificação da alternativa correta pelos grupos solicitei que justificassem o porquê da escolha. Algumas respostas foram:

A02 – *“Porque as outras figuras têm partes encavaladas, a mais perfeita é a alternativa “E”.”*

A12 – *“Na alternativa “A” uma parte passa dentro da outra*.”

A31 – *"A alternativa "C" não é porque as pernas de cima passam por dentro das pernas horizontais."*

A22 – *"Na alternativa "B" a madeira não vai para o lado certo, o desenho é retorcido."*

A18 – *"A alternativa "B" não é porque um lado transpassa para o outro."*

Um dos alunos justificou a escolha da alternativa correta dizendo que "*é a única figura que poderia ser montada corretamente, pois parece uma pirâmide com um espelho no meio refletindo a parte de cima."*

Nesse momento, enquanto ouvia os alunos o sinal é acionado e os alunos iniciam o desligamento dos computadores para retorno à sala de aula.

Com as folhas de atividades em mãos observei que apenas um dos grupos havia assinalado a resposta incorreta.

ATIVIDADE 3 - 3º ENCONTRO:

Com uma pequena caixa de sapatos contendo pequenos pedaços de papel dobrados e numerados de 1 a 45, fiz sorteio de grupos com 5 elementos, o que formou 7 grupos. Quando, o número sorteado era de aluno que não estava presente ou que tinha sido transferido, repetia-se o procedimento.

Formados os grupos distribui o problema 3[6].

Uma locomotiva viaja à velocidade de 108 Km/h por uma estrada de ferro que passa a 15 metros abaixo de um longo viaduto de uma rodovia. Um carro, à velocidade de 72 Km/h, cruza o viaduto exatamente sobre a locomotiva. A que distância a locomotiva e o carro estarão um do outro, 10segundos depois?

Passaram alguns minutos até que os alunos focassem atenção ao problema e começassem a surgir perguntas.

A18 – *"Esse problema vai ser resolvido com as fórmulas do caderno?"*

Prof. – Podemos tentar! Será possível?

A pergunta parece ser oportuna, já que estavam estudando nas aulas anteriores distâncias entre pontos e entre ponto e reta do conteúdo de geometria analítica. Durante o tempo que me desloquei entre os grupos foi comum ouvir dos alunos "*parece física*".

[6]Adaptado de: LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A.P. **Aprendendo e Ensinando Geometria**. Tradução de DOMINGUES, H.H. São Paulo: Editora Atual, 1994, p.247.

Em dois dos grupos, os alunos tentaram representar a situação em um desenho, outros três grupos faziam conjeturas a respeito de velocidade e deslocamento. Nesse momento era comum os alunos desviarem a atenção para um grupo próximo.

Participando da conversa em um dos grupos fui questionado:

A2 – *"Professor um deles anda a 108 km/h em uma direção o outro a 72 Km/h em outra direção, então a distância é de 180km?"*

Prof. – Será? O problema não informa o quanto andou cada veículo. Ele só apresenta a velocidade de cada um.

Prof. – Como você entende a informação 108 Km/h?

A11 – *"Que durante uma hora ela andará 108 Km*."

A2 – "*Haaaa.... então tem que fazer transformação!"*

Nesse momento me retiro do grupo e vou até o grupo ao lado e percebo que tentavam representar a situação com um desenho, entretanto não consideravam a distância entre a pista e os trilhos (altura do vão livre).

Prof. – Vocês estão esquecendo dos 15 metros.

A43 – *"Esse cruzamento não quer dizer que eles se encontram né!"*

Com essa pergunta percebi o que considero um erro na escrita do problema. Peço atenção e, falando para todos, informo que a palavras "cruza[7]" quer dizer que a rodovia e a ferrovia formam um ângulo de 90º graus, apesar de não se encontrarem.

A15 – "*Não entendi*."

Prof. - Duas retas, em um mesmo plano, que se interceptam formando ângulo de 90º graus dá-se o nome de retas coplanares e perpendiculares.

Prof. – Já quando temos duas retas, em planos diferentes, temos retas chamadas de reversas. Mesmo em planos diferentes elas podem formar ângulos de 90º graus, ai elas são ortogonais!

Prof. – Veja bem, se tivéssemos condições de rebaixar os trilhos da estrada de ferro até coincidir com o asfalto, as duas estradas teriam um ponto em comum e formariam um ângulo de 90º. Portanto elas formam ângulo reto, mesmo em planos diferentes.

[7] Apesar de ser entendida como uma intersecção. Nesse caso tem objetivo de despertar o conceito de retas reversas e retas ortogonais.

Alguns minutos mais tarde, percebo que, em alguns grupos as ilustrações caminhavam para um triângulo retângulo com catetos 200 metros e 300 metros.

Prof. – Como chegaram nessa medida de 300 metros?

A36 – *“Ele anda 108km em 60 minutos, então dividimos 180 por 60 dando 1,8.”*

Prof. – 1,8 o quê?

A36 – *“1,8 metros em um minuto.”*

A12 – *“Não. É 1,8 km por minuto o que dá 1800 metros por minuto.”*

A36 – *“Isso. Ai pegamos 1800 e dividimos por 6.”*

Prof. – Por que dividiu por seis, não deveria ser por 60 novamente?

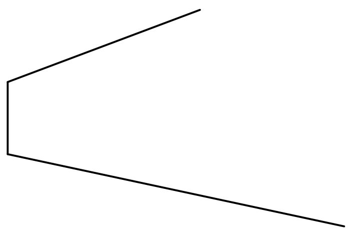
A36 – *“Dividir por 60 e depois fazer vezes 10 segundos, então dividimos por 6!”*

Com a discussão acima e o tempo da aula chegando ao fim, recolho as atividades para o próximo encontro.

<u>ATIVIDADE 3 - 4º ENCONTRO:</u>

Quando chego à sala de aula recebo uma enxurrada de perguntas quanto à continuidade da atividade iniciada no encontro passado. Solicito então que formem os mesmos grupos e enquanto movimentam as carteiras faço a entrega das folhas com o problema.

Peço atenção de todos e coloco no quadro de giz a figura abaixo;



de imediato surge a pergunta “*o que é isso professor*”.

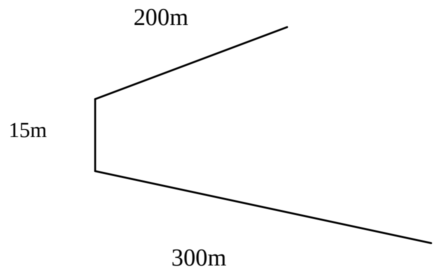
Prof. – Cada um de vocês procure nos materiais a primeira atividade desenvolvida a algumas aulas atrás. “Aquela que falava do Escher.”

Alguns já não dispunham da atividade, que foi devolvida para cada um no dia seguinte que ocorreu, mas aos que encontraram questionei o porquê não adotaram a alternativa “B” como verdadeira naquele exercício.

A12 – *“Porque é impossível construirmos um objeto igual a esse!”*

Prof. – Essa figura da atividade 1 é impossível de ser construída, mas a figura que coloquei no quadro é possível e lembra o quê?

Com o silêncio da turma completo a figura:



Prof. – E agora?

A02 – *“É o desenho que representa o problema!”*

Prof. – Isso Mesmo. Aqui em nossa sala é possível observar uma situação semelhante a essa!

A02 – “*Os cantos das paredes com o chão*!”

A30 – “*Os cantos das paredes com o teto também*!”

Prof. – Se a estrada de ferro e a rodovia podem ser trabalhadas da mesma forma como os cantos da nossa sala, o que representaria a distância entre a locomotiva e o carro?

Deixo a frente da sala e solicito que dêem continuidade da resolução. Rapidamente alguns grupos começaram a apresenta figuras com a apresentação da diagonal.

Em um dos grupos a tentativa era utilizar os valores numéricos apresentados pelo problema, porém de forma incorreta: 15 vezes 200; 300 mais 200.

Prof. – Isso que o problema pede para ser calculado não é a área e sim uma distância entre dois pontos; o primeiro é a posição em que se encontra a locomotiva após os 10 segundos e o outro e a posição do carro.

A27 – “*Professor, mas essa medida fica dentro da caixa?”*

Prof. – Sim, além dessa medida, que chamamos diagonal do sólido, podemos traçar outras entre os vértices.

Mais alguns minutos e começam a surgir figuras com as diagonais de faces. Nesse instante lembrei-me de que, no encontro passado, alguns alunos representaram a solução do problema em triângulos, então os questionei sobre o tipo de triângulo que estavam encontrando.

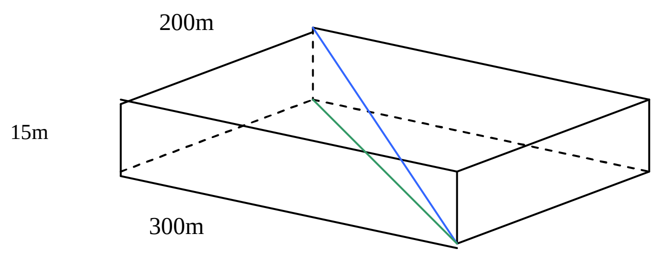
A34 – *“Retângulo.”*

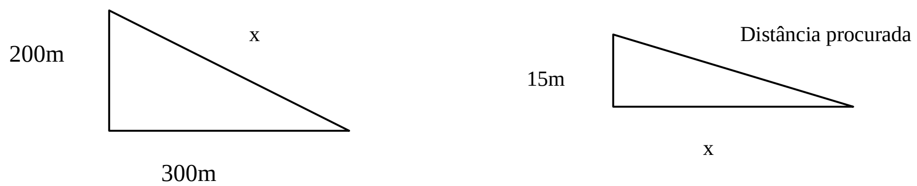
Prof. – O que é possível ser aplicado apenas em triângulos que possuem ângulos de 90º.

A10 – *“Aquele negócio da hipotenusa!”*

Prof. – No encontro passado alguns tentaram aplicar o conceito do Teorema de Pitágoras. Esse teorema só pode ser aplicado em triângulos retângulos. Onde nessa figura é possível visualizar triângulos retângulos?

Após me afastar do grupo para efetuar uma rápida arrumação sobre a mesa do professor, percebo movimentação de alunos entre os grupos. Decido então solicitar a um dos grupos, que já tinha visualizado as diagonais, que apresentasse no quadro de giz onde ficavam os triângulos retângulos que seriam utilizados;





Mais alguns minutos e os grupos começam a apresentar o cálculo da medida indicada por “x”.

É comum observamos alunos que no ímpeto de elevar os catetos ao quadrado não posicionam corretamente a hipotenusa. Nos triângulos em questão os catetos são conhecidos, o que não chega a causar grandes transtornos.

Um dos erros que pude observar ocorreu quando do cálculo da diagonal de uma das faces:

“$200^2 + 15^2$”

“$4000 + 225$”

“$\sqrt{4225}$ ”

“65”

Esse erro é logo corrigido quando peço que o grupo faça uma verificação nos cálculos e observem a coerência na resposta encontrada.

Desta forma, com os alunos finalizando o teorema e satisfeito com o empenho dos mesmos concluo o encontro.

ATIVIDADE 9 - 12º ENCONTRO:

Com a proposta de resolver o problema nº 9[8], iniciamos o encontro.

Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone circular invertido, de eixo vertical, e está cheio até a boca (nível do solo) com 27000 litros de água e 37000 litros de petróleo (o qual é menos denso que a água). Sabendo que a profundidade total do tanque é 8 metros e que os dois líquidos não são miscíveis, a altura da camada de petróleo é de:

De início houve algum alvoroço com a primeira leitura do problema os alunos não se achavam em condições de resolver esse problema, questionados por que, diziam *"é muito difícil"*, "*não resolvemos nenhum parecido com esse*" ou ainda *"que não tinham aprendido o conteúdo de cone".*

Questionados de algum exemplo de cone, as respostas foram: *"chapeuzinho de palhaço*" e *"casquinha de sorvetes"*. Aproveitando os exemplos fornecidos pelos alunos, pedi a atenção de todos e rapidamente com uma tesoura emprestada de uma das alunas e uma folha de papel reproduzi a formato de um cone. Com o formato de cone pronto questionei qual o formato tinha a base do cone, que se encontrava vazada, em aberto.

A43 – "É uma circunferência."

Prof. – Pensando no contorno da base do chapéu é uma circunferência realmente, mas se o chapéu não fosse vazado, ou seja se ele fosse maciço, teríamos um círculo na base.

Desmontando a superfície lateral do cone, mostrei que o formato não era triângulo nem quadrilátero, mas sim um setor circular. Portanto quando trabalhamos com áreas de cone, podemos ter: área de base que é um círculo, e área lateral que é um setor circular.

Voltando a atenção para o problema questionei o que seria volume do cone. Alguns exemplos surgem.

A17 – "*É todo esse espaço onde foi colocado o petróleo e a água!"*

---

[8]http://www.ld.utfpr.edu.br/arquivos/vestibular/2007_inverno/prova2.pdf

A24 – “*É o que tem dentro do tanque!”*

Prof. – Então a quantidade de líquido é o volume?

Prof. – Qual o total de produto que temos no interior do reservatório, sem que haja mistura, ou seja, não são miscíveis?

A24 – “*27000 + 37000 que dá 64000.”*

Prof. – 64000 o que?

A24 – “litros”

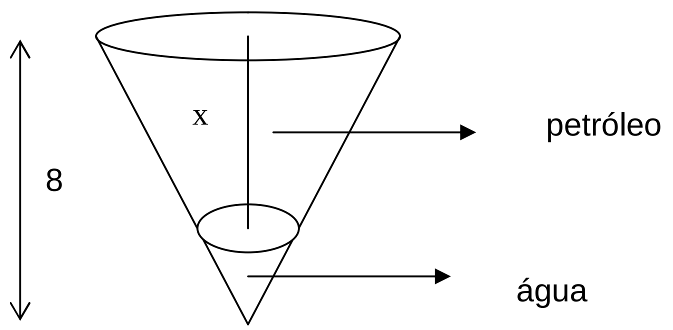
Prof. – Pois bem, a unidade de medida “Litro” é para medir capacidade e não volume. O volume é o espaço tridimensional que esse líquido ocupa, portanto precisamos fazer uma transformação de litros para m³! Isso vai ocorrer quando utilizamos a relação que 1m³ é igual a 1000 litros.

Nesse momento, solicitei que formassem grupos de 4 alunos para trabalho em equipe, enquanto os grupos se formavam fui até a supervisão e providenciei alguns livros didáticos, aqueles que já foram utilizados em encontros passados, para pesquisa do conteúdo.

Até o final do encontro, aproximadamente 15 minutos, ficaram livres para que observassem no livro detalhes a respeito do conteúdo. O que chamou a atenção é que muitos alunos diziam não encontrar problema semelhante ao que teriam que resolver. Minha interferência aconteceu no sentido de que buscassem o entendimento de como calcular o volume do cone.

ATIVIDADE 9 - 13º ENCONTRO:

Com os grupos formados e sem o auxilio do livro didático, retomamos a resolução do problema nº 9, antes que começasse os questionamentos, fui até o quadro de giz e reproduzi um esquema do problema:



Surgem questões:

A06 – *“Podemos dividir a altura do cone ao meio?”*

Prof. – Não. O problema não traz a informação que o petróleo ocupará metade da altura do cone!

A33 – “*Como utilizar o volume do cone que é de 64m³?”*

Prof. – O que é volume do cone?. Como podemos calcular o volume?. Você tem lembrança se no livro tínhamos algum procedimento?

A24 – “Podemos utilizar regra de três?

Prof. – Como faria isso. Quais as grandezas que utilizará?

A10 – “*O que eu faço primeiro?”*

Prof. – Penso que deveria definir uma estratégia a ser seguida!

A32 – *“Como já conheço o volume e a altura do cone, posso então descobrir o raio do círculo?”*

Prof.– Muito bem, descobrindo o raio da base do reservatório, você terá uma informação a mais para auxiliar na busca da espessura da camada de petróleo.

Com a atenção de todos e utilizando do quadro de giz coloco a fórmula para o calculo do volume do cone, $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, e peço que substituindo as informações conhecidas na fórmula estaremos descobrindo o raio(R) do reservatório, que chamarei de cone maior, enquanto o cone preenchido com a água e chamarei de cone menor.

Minutos depois começam a surgir o valor do raio do reservatório, R=2,76 que é equivalente a $\sqrt{\frac{24}{\pi}}$. Prosseguindo novo questionamento é feito de forma que a turma ouvisse:

A10 – “Professor, t*enho o raio, mas isso não responde o problema?”*

Prof. – Calculamos o raio do reservatório como um todo, mas também podemos achar o raio do cone menor formado pela água?

Os grupos partem em busca do raio do cone preenchido pela água. Em diversos grupos a questão que surge é:

GA – “Tenho o volume que é de 27m³, mas não tenho a altura nem o raio?”

Grupo por grupo onde surgiu a dúvida a resposta foi:

Prof. – Vejam a altura do cone maior, que é de 8 metros, foi dividida em duas partes, a primeira parte e a espessura da camada de petróleo e a segunda e a altura do cone menor que está preenchido com água. Como representamos a espessura do petróleo por “x”, podemos representar a altura do cone menor de que forma?

A13 – “x – 8”

Prof. – Não.

A24 – “8 – x”

Prof. – Já temos uma expressão que represente a altura do cone. Podemos então calcular o raio do cone menor em função do “x”.

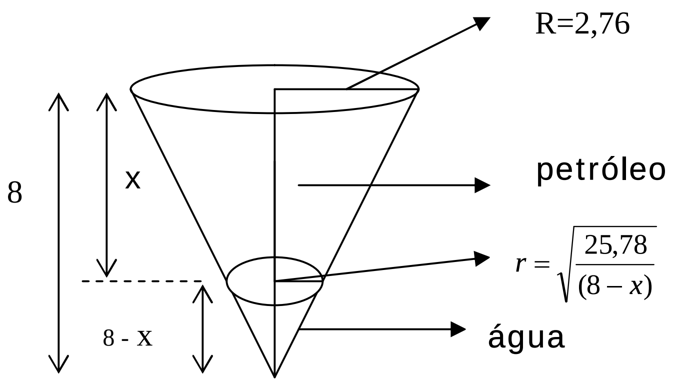
Com as substituições feitas na fórmula do volume começam a surgir problemas com o manuseio da equação. Era muito comum aos alunos ficarem perdidos nas operações, o cálculo algébrico foi um grande transtorno para os grupos. Isso só foi resolvido quando em alguns grupos o professor foi explicando o que fazer até chegarem a $r=\sqrt{\frac{25{,}78}{(8-x)}}$ que é equivalente a $r=\sqrt{\frac{81}{\pi(8-x)}}$.

Para que todos ficassem em nível de igualdade solicitei que houvesse mudança entre os participantes dos grupos. Essa atitude visava além de uma maior interação um auxilio para aqueles que estavam com dificuldades nos cálculos.

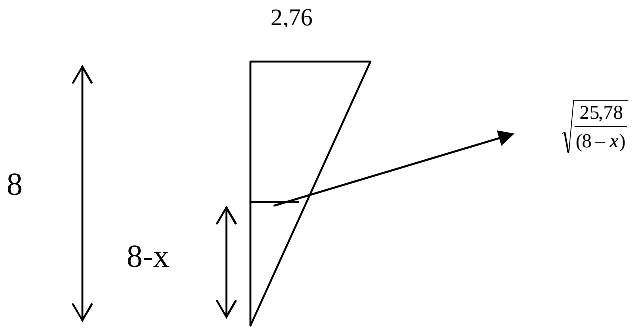
Alguns grupos questionavam como prosseguir, entretanto não houve tempo para uma continuidade.

<u>ATIVIDADE 9 - 14º ENCONTRO:</u>

Pelo terceiro encontro seguido, retomamos o problema nº 9. Esse já era o problema que estava demandando maior tempo na sua resolução. Com os grupos formados pedi aos alunos que representassem o esquema do problema com todas as informações já conhecidas. Alguns minutos a maioria dos grupos já tinham o esquema, solicitei então que o aluno A19 fizesse a reprodução no quadro:



Prof. – Muito bem , observe: (faço no quadro de giz)



Prof. – Quantos triângulos são possíveis observarmos?

GA – *"dois."*

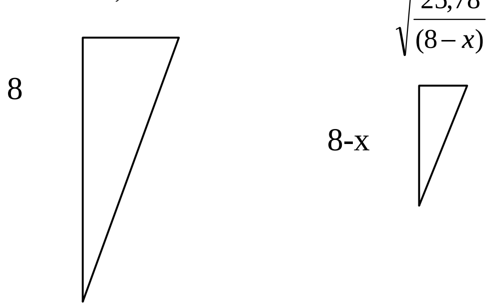
Prof. – O que podemos fazer com esses dois triângulos?

A06 – *"Dividir 8 por 2,76?"*

A10 – *"Fazer hipotenusa ao quadrado?"*

Prof. – Aplicar o Teorema de Pitágoras é possível mas, não vai resolver o problema. Você acabará encontrando o terceiro lado dos triângulos, o que chamamos de geratriz do cone.

Peço que separem os triângulos.



Prof. – Ok. Observem que o raio do cone grande e a altura do mesmo cone formam um ângulo de 90º. Acontecendo o mesmo com o raio do cone menor e sua altura.

Prof. – Podemos observar que o ângulo menor (aponto para o ângulo inferior do desenho) é comum aos dois triângulos, ou seja, ele esta presente no triângulo maior e também no menor. Alguém pode me dizer o que isso caracteriza?

Nenhuma resposta.

Prof. –Isso é o que na 8ª série chamávamos de triângulos semelhantes, ou seja, dois triângulos com dois ângulos coincidindo o valor das medidas fazem com que o terceiro também seja de mesma medida, isso porque a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é 180º. Portanto podemos montar razão de semelhança entre os lados correspondentes.

Torno a andar entre os grupos, observo alguns grupos montando as razões de forma incorreta, sem relacionar os lados correspondentes, grupo a grupo foi indicando quem eram os lados que se correspondiam e assim a proporção foi obtida $\frac{8}{(8-x)} = \frac{2,76}{\sqrt{\frac{25,78}{(8-x)}}}$. Dessa forma o encontro chegou ao fim.

ATIVIDADE 9 - 15º ENCONTRO:

Com uma redistribuição dos grupos, solicitei que confrontassem o desenvolvimento do problema nº 9, isso proporciono que aqueles que não tinham alcançado a proporção $\frac{8}{(8-x)} = \frac{2,76}{\sqrt{\frac{25,78}{(8-x)}}}$ assim o fizessem.

Durante o atendimento dos grupos surgem perguntas:

A36 – *"Eu sei que vai multiplicar cruzado, mas e essas raízes?"*

A04 – *"Como que continuo?"*

A resposta do professor baseava-se na propriedade da radiciação que permite fazer o cancelamento da raiz.

Prof. – Primeiro devemos eliminar a raiz, isso é possível quando ela estiver elevada ao quadrado, entretanto não podemos elevar

> a raiz que está no segundo membro (lado direito da equação) sem que elevemos o primeiro membro (lado esquerdo da equação).

Começam surgir expressões iguais ou equivalentes a $\frac{64}{(8-x)^2} = \frac{2{,}76^2}{\frac{25{,}78}{(8-x)}}$.

Alguns grupos tentaram a multiplicação entre os extremos cruzados, outros primeiro efetuaram a divisão de 2,76² por $\frac{25{,}78}{(8-x)}$.

Em vários grupos tive que interferir para corrigir a expressão que resultava de (8 – x)².

> Prof. - Como fizeram para resolver (8 – x)² ?
>
> A24 – “Oito ao quadro e “x” ao quadrado.”
>
> Prof. – Como fazem quando temos seis ao quadro?
>
> GA – “Seis vezes seis”
>
> Prof. – Nesse caso temos uma subtração ao quadrado, portanto temos que fazer ela (subtração de dois termos) por ela mesma.

Para aqueles grupos que tinham resolvido (8 – x)² o impasse se instalou pois quando multiplicavam cruzado, surgia uma equação do terceiro grau. A sugestão dada a eles é que não efetuassem o quadrado da diferença, chegando à expressão $(8-x)^3 = 216{,}52$.

Alguns alunos questionavam como resolver a potencia de três. Solicitava que relembrassem o que acontece em uma equação quando em um dos membros temos a potência de 2.

> GA – “Vai para o outro lado na forma de raiz.”
>
> Prof. - Então a potência de três deverá ir de que forma?

Não foi muito tempo e a raiz cúbica aproximada surge. É seis. Ficando a equação com o formato (8 – x) = 6, o que levou os alunos a concluírem que o “x” que era a espessura da camada de petróleo media 2 metros.

Quando o resultado era encontrado uma sensação de dever cumprido se instalava, eufóricos queriam compartilhar com os grupos que ainda estavam no processo. Os alunos expressavam que maior dificuldade era relembrar conceitos e cálculos básicos que dificultavam a resolução.

Conclusão

Por mais que presenciamos avanços no ensino da matemática escolar é comum encontrarmos alunos que afirmam não entender os conteúdos. Por outro lado encontramos professores conscientes da necessidade de buscar conhecimentos que tornem a aprendizagem do conteúdo matemático mais significativo e prazeroso.

Durante as atividades aqui relatadas, o grande trunfo que deu suporte ao trabalho foi o interesse dos alunos e o trabalho colaborativo entre eles. Foram freqüentes os comentários deles de que as aulas estavam mais interessantes, que não havia a obrigação de ficar copiando, principalmente quando não era compreendido o exposto, que a atenção era dispensada direto nas atividades propostas.

No começo dos trabalhos, a ansiedade em questionar o professor “como fazer”, e também o professor em fornecer respostas quase que inviabilizou o trabalho. Entretanto no desenrolar dos encontros, conseguimos instalar um espaço de reflexão e discussão dos problemas propostos.

Acredito que adotando a estratégia metodológica da Resolução de Problemas nas aulas regulares, o professor não deve ficar ansioso em terminar uma atividade para começar outro. Ficou muito claro para mim que o ritmo da turma não deve ser induzido pelo professor. Esse ritmo surgirá naturalmente, e tenderá a, gradativamente, acelerar com o decorrer das aulas.

Muitos pontos foram apontados pelos alunos e, entre eles destaco:

- **como positivos:**
  - ✓ “*No grupo cada um dá sua opinião.”*
  - ✓ *“As pessoas que são mais difícil de aprender elas aprendem mais e as pessoas que sabem elas ensinam.”*
  - ✓ *“A aula fica mais interessante, a gente se distrai com os problemas.”*
  - ✓ *“Em grupo, na minha opinião, é melhor, pois se um não sabe o outro ajuda e vice e versa.”*
  - ✓ *“Exige um maior emprenho dos alunos*
  - ✓ *“Aprendemos de forma diferente e relembrando de matérias já aprendidas.”*
  - ✓ *“Em minha opinião é uma estratégia interessante.”*
  - ✓ *“Aprendemos mais debatendo.”*
  - ✓ *“É melhor fazer problemas do que prova.”*
  - ✓ *“É melhor porque meche mais com a cabeça dos alunos e a atenção dos alunos é maior.”*
  - ✓ *“Podemos ensinar e ao mesmo tempo aprender.”*

- ✓ *“A presença dos alunos nas aulas são muito mais chamativa porque não tem chance de fazer o trabalho de novo se perder.”*
- ✓ *“Eu prefiro a resolução dos problemas pois a aula fica mais interessante, empolgante. Não tem que ficar escrevendo tanto conteúdo e ao mesmo tempo vemos o que é preciso.*
- ✓ *“Aprendemos quebrando a cabeça, pois é sempre com as dificuldades que aprendemos.”*
- ✓ *“Chama mais a atenção dos alunos, mais fácil, não precisa copiar muito no caderno.”*
- ✓ *“Em grupo, cada um tem sua idéia e ai, ajudamos todos e chegamos a uma só conclusão.”*

- **e como negativos:**
  - ✓ *“É mais complicado de fazer, é mais demorado, prefiro o professor explicando no quadro.”*
  - ✓ *“As vezes muitos não ajudam, e sim só copiam.”*

Penso que valeu!

Referências

BRITO, Márcia Regina F. de. *Contribuições da Psicologia Educacional à Educação Matemática*. In: BRITO, Márcia Regina F. de (org.) **Psicologia da Educação Matemática**. Florianópolis: Editora Insular, 2005, p.49-67.

BUTTS, Thomas. *Formulando Problemas Adequadamente*. In: KRULIK, S.; REYS, R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual, 1997, p.32-48.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. *Sobre a Resolução de Problemas (I)*. **NOSSO FAZER**, Ano 1, n.º5. Secretaria Municipal de Educação, Londrina, 1995. p. 1.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Sobre Avaliação**. Notas de aula. Texto mimeografado, 2007.

KANTOWSKI, Mary Grace. *Algumas Considerações sobre o ensino para a Resolução de Problemas*. In: KRULIK, S.; REYS, R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual, 1997, p.270-282.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. *Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas*. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani - organizadora. **Pesquisa em Educação Matemática, Concepções & Perspectiva.** São Paulo: Editora UNESP, 1999, p.199-218.

POLYA, George. *Sobre a resolução de problema de matemática na high school*. In: KRULIK, S.; REYS, R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar.** São Paulo: Atual, 1997, p.01-12.

SCHOENFELD, Alan. *Por que toda esta agitação acerca da Resolução de Problemas?* In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P.(Eds). **Investigar para aprender Matemática**. Lisboa: Projecto MPT e APM. 1996, p. 61-72.

STANIC, GEORGE M. A. E KILPATRICK, JEREMY. *Perspectivas históricas da resolução de problemas no currículo de matemática*. In: CHARLES, R. I. e SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessment of mathematical problem solving**. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1989.